به نام خداوند بخشنده مهربان

جبر خطی

دانشکده مهندسی کامپیوتر

حمیدرضا ربیعی، مریم رمضانی
بهار ۱۴۰۳

نرم، گرام اشمیت، تبدیل خطی | **تمرین سوم** | تاریخ انتشار: ۲۳ فروردین ۱۴۰۳

۱. پرسش‌های خود درمورد این تمرین را در سامانه کوئرا مطرح کنید.

۲. **سیاست ارسال با تاخیر:** شما در مجموع در طول نیم‌سال می‌توانید از ۱۶ روز تاخیر استفاده کنید. این مقدار برای تمارین تئوری و عملی به‌صورت جداگانه حساب می‌شود. تاخیرها با مقیاس ساعت محاسبه شده و به بالا گرد می‌شوند.

۳. **سیاست مشارکت دانشجویان در حل کردن تمارین:** دانشجویان می‌توانند در حل تمارین برای رفع ابهام و یا به‌دست آوردن ایده‌ی کلی با یک‌دیگر مشورت و همفکری کنند. این کار مورد تایید و تشویق تیم ارائه‌ی درس می‌باشد؛ چرا که هم‌فکری و کار گروهی می‌تواند موجب تقویت یادگیری شود. اما به‌دست آوردن جزئیات راه‌حل و نگارش پاسخ باید تماما توسط خود دانشجو انجام شود. **حتما در انتهای پاسخ‌های ارسالی خود نام افرادی که با آن‌ها همفکری کردید را ذکر کنید.**

سوالات تئوری (۱۰۰ نمره)

تاریخ تحویل: ۲ اردیبهشت ۱۴۰۳

پرسش ۱ (۱۵ نمره) درستی یا نادرستی هر یک گزاره های زیر را با ذکر دلیل مشخص کنید.

(آ) دو بردار عمود بر هم مستقل خطی هستند.

(ب) اگر $\|u-v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2$ آنگاه بردار های u و v بر هم عمود هستند.

(ج) فرض کنید $u, v \in V$ به طوری هستند که $\|u\| = \|v\| = 1$ و $\langle u, v\rangle = 1$ پس $u = v$ است.

پرسش ۲ (۱۵ نمره) با توجه به تعریف ضرب داخلی برای دو تابع $f(x),\ g(x)$ یک کران بالا برای I بر حسب n و m پیدا کنید.

$$\langle f(x), g(x)\rangle = \int_0^1 f(x).g(x)\,dx$$

$$I = \int_0^1 \sqrt[n]{xe^{mx}}\,dx \quad n, m \in \mathbb{N}$$

پرسش ۳ (۲۰ نمره) فرض کنید C یک زیرفضا از V است با این ویژگی که به ازای هر $u, v \in C$ داریم $\frac{1}{2}(u+v) \in C$. به ازای بردار دلخواه $w \in V$ فقط یک نزدیک ترین بردار به آن درون C وجود دارد. به عبارتی دیگر، حداکثر یک u وجود دارد به طوری که $\forall v \in C;\ \|w-u\| \le \|w-v\|$

پرسش ۴ (۲۵ نمره) نشان دهید بردار های $v_1, \dots, v_m$ وابسته خطی هستند اگر و تنها اگر با اجرای پروسه گرام اشمیت روی آنها، حداقل یک بردار صفر تولید شود. به عبارتی دیگر اگر با اجرای این پروسه به ترتیب بردار های $q_1, \dots, q_m$ تولید شوند، آنگاه داریم $\exists\, i\ s.t.\ q_i = 0$

پرسش ۵ (۲۵ نمره) فرض کنید b و c اعداد حقیقی باشند. تبدیل خطی T را به صورت $T : \mathcal{P}(R) \to R^2$ تعریف می کنیم به طوری که:

$$T_p = (3p(4) + 5p'(6) + bp(1)p(2), \int_{-1}^{2} x^3 p(x)dx + c\sin(p(0)))$$

اثبات کنید T یک تبدیل خطی است اگر و تنها اگر $b = c = 0$.